

Магнитные состояния плоских ферромагнитных нано-элементов как функции комплексного переменного

Константин Л. Метлов

3 марта 2010 г.

Нано-элементы

Диски

Шестиугольники

Квадраты

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Какими бывают нано-элементы

Нано-элементы

Диски

Шестиугольники

Квадраты

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

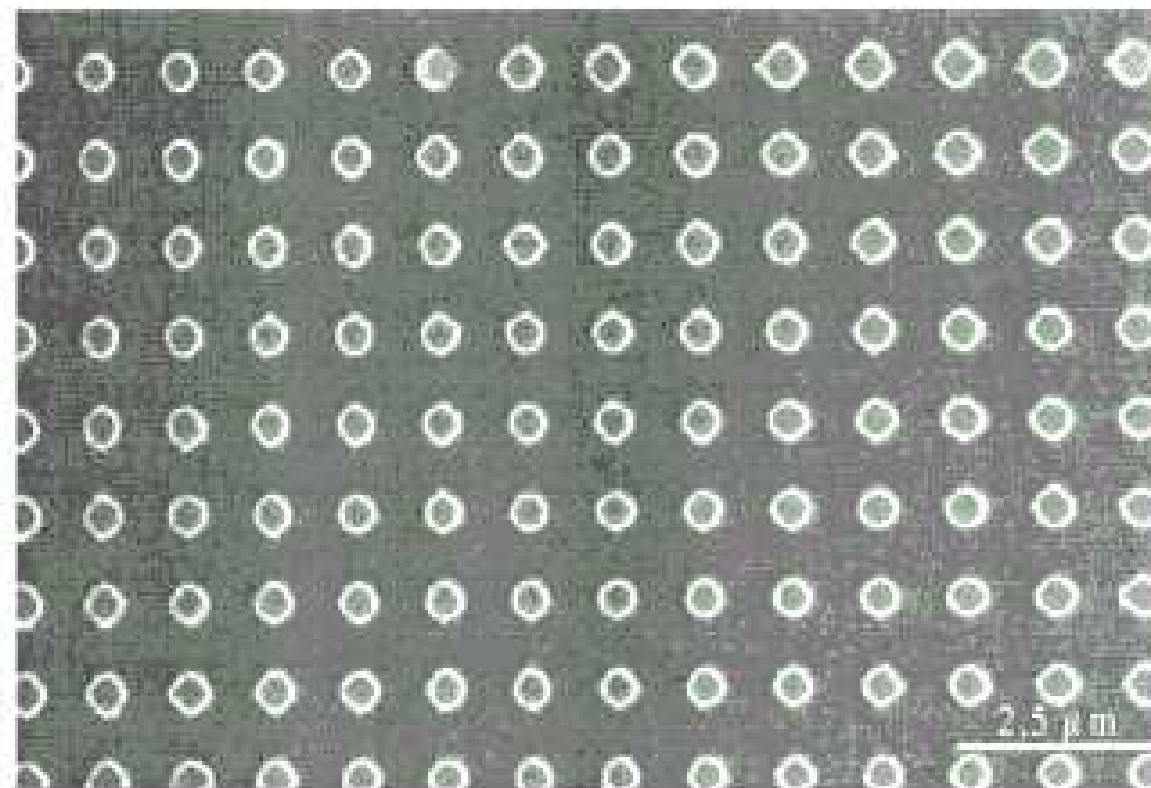


FIG. 1. SEM image of a sample with period $p = 1030$ nm and a dot diameter of $d = 480$ nm.

Appl. Phys. Lett. 71 (19), 10 November 1997.

Шестиугольники

Нано-элементы

Диски

Шестиугольники

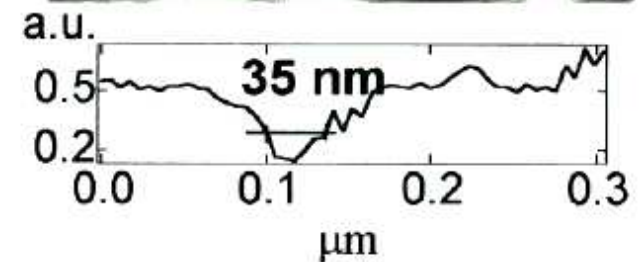
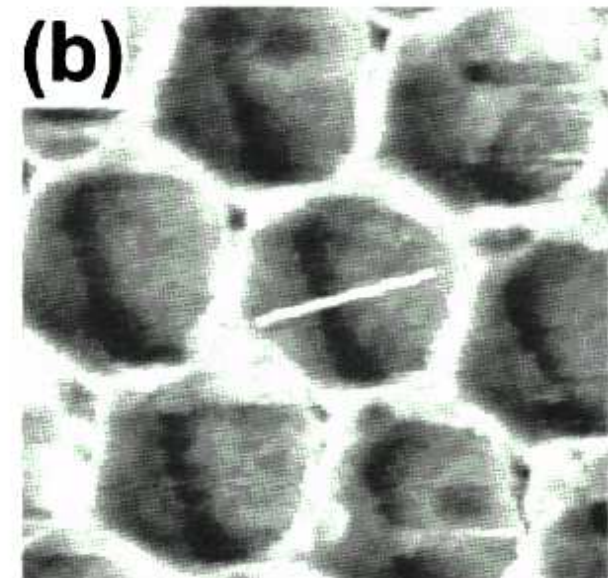
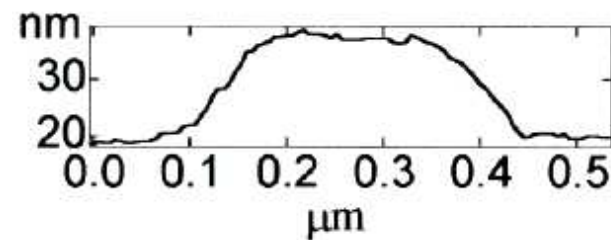
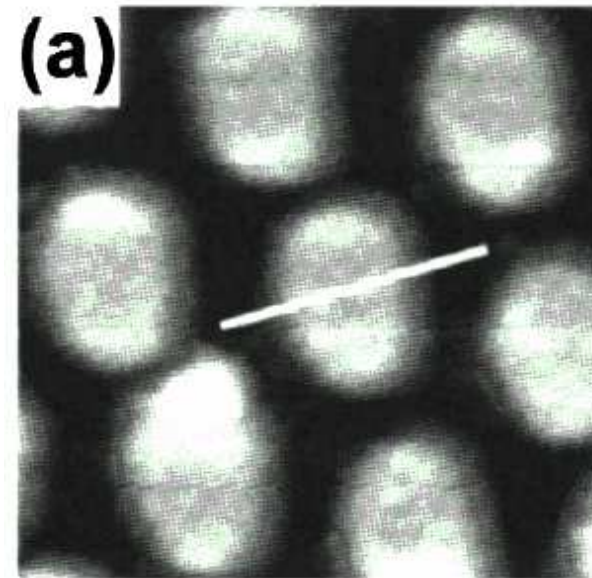
Квадраты

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы



Appl. Phys. Lett. 76(20), 15 May 2000

Квадраты

Нано-элементы

Диски

Шестиугольники

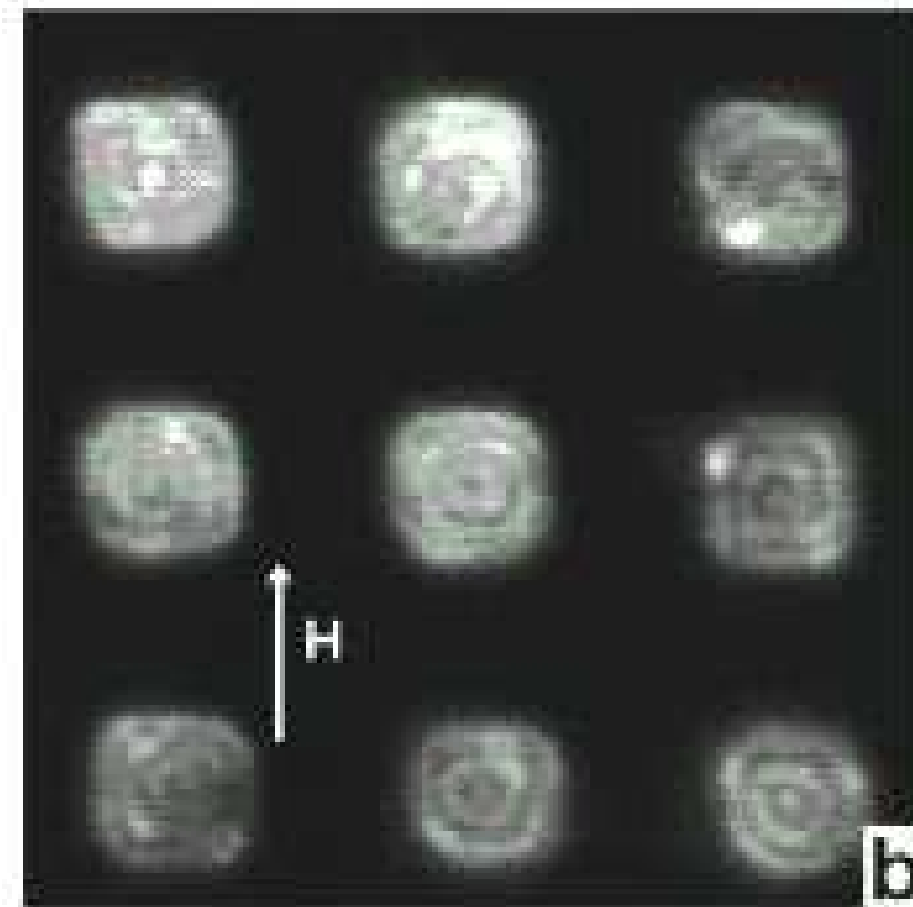
Квадраты

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы



1 μm

Нано-элементы

Микромагнетизм

Континуальное
приближение

Обменная
энергия

Энергия намаг-
нитности

Поля рассеяния

Магнитные
заряды

Энергия
магнитных
зарядов

Статическая
задача

Обменная
длина

Нано-
магнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Описание магнетика и его энергия

Континуальное приближение

Нано-элементы

Микромагнетизм

Континуальное
приближение

Обменная
энергия

Энергия намаг-
ниченности

Поля рассеяния

Магнитные
заряды

Энергия
магнитных
зарядов

Статическая
задача

Обменная
длина

Нано-
магнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Усредняя по малому объему...

Вектор намагниченности: $\vec{M}(\vec{r})$, $|\vec{M}| = M_S$

M_S – намагниченность насыщения, параметр материала.

Безразмерная намагниченность: $\vec{m} = \vec{M}/M_S$, $|\vec{m}| = 1$

$$E_{\text{EX}}[\vec{m}] = \frac{C}{2} \iiint_V \sum_{i=X,Y,Z} (\vec{\nabla} m_i)^2 d^3\vec{r} \quad (1)$$

C – exchange stiffness, обменная жесткость, “обменная константа”.

Обменная энергия стремится сделать распределение намагниченности как можно более однородным.

Нано-элементы

Микромагнетизм

Континуальное приближение

Обменная энергия

Энергия намагниченности

Поля рассеяния

Магнитные заряды

Энергия магнитных зарядов

Статическая задача

Обменная длина

Нано-магнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Энергия намагниченности

Энергия взаимодействия намагниченности с полем, созданным ей самой:

$$E_{MS}[\vec{m}] = -\mu_0 \gamma_B M_S^2 \iiint_V \frac{\vec{h}_D[\vec{m}] \cdot \vec{m}}{2} d^3\vec{r} \quad (2)$$

Нано-элементы

Микромагнетизм

Континуальное приближение

Обменная энергия

Энергия намагниченности

Поля рассеяния

Магнитные заряды

Энергия магнитных зарядов

Статическая задача

Обменная длина

Нано-магнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Нано-элементы

Микромагнетизм

Континуальное приближение

Обменная энергия

Энергия намагниченности

Поля рассеяния

Магнитные заряды

Энергия магнитных зарядов

Статическая задача

Обменная длина

Нано-магнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Из уравнений Максвелла в статическом случае при отсутствии макроскопических токов размагничивающее поле выражается через скалярный потенциал

$$\vec{h}_D = \vec{\nabla} u(\vec{r}), \quad (3)$$

определяемый уравнением Пуассона

$$\vec{\nabla}^2 u = -\vec{\nabla} \cdot \vec{m}, \quad (4)$$

при условии

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} |\vec{r}| u, |\vec{r}|^2 |\vec{\nabla} u| < \infty \quad (5)$$

Нано-элементы

Микромагнетизм

Континуальное приближение

Обменная энергия

Энергия намагниченности

Поля рассеяния

Магнитные заряды

Энергия магнитных зарядов

Статическая задача

Обменная длина

Нано-магнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Уравнение Пуассона для магнитного потенциала

$$\vec{\nabla}^2 u = -\vec{\nabla} \cdot \vec{m} \quad (6)$$

напоминает уравнение для электростатического потенциала, произведенного системой зарядов

$$\rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{m} \quad (7)$$

На границе магнетика это автоматически дает поверхностную плотность заряда $\sigma = (\vec{m} \cdot \vec{n})$.

Энергия магнитных зарядов

Формально, используя функцию Грина уравнения (6),

$$E_{MS} = \frac{\mu_0 \gamma_B M_S^2}{2} \left(\iiint \iiint \frac{\rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_2) d^3 \vec{r}_1 d^3 \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \iint \iint \frac{\sigma(\vec{r}_1) \sigma(\vec{r}_2) d^2 \vec{r}_1 d^2 \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right) \quad (8)$$

Минимальное значение этой энергии, 0, достигается при полном отсутствии магнитных зарядов.

Магнетик стремится к устранению магнитных полюсов (pole avoidance principle).

Нано-элементы

Микромагнетизм

Континуальное приближение

Обменная энергия

Энергия намагниченности

Поля рассеяния

Магнитные заряды

Энергия магнитных зарядов

Статическая задача

Обменная длина

Нано-магнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Нано-элементы

Микромагнетизм

Континуальное приближение

Обменная энергия

Энергия намагниченности

Поля рассеяния

Магнитные заряды

Энергия магнитных зарядов

Статическая задача

Обменная длина

Нано-магнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Состоит в нахождении распределения намагниченности $\vec{m}(\vec{r})$ в магнетике, минимизирующего его полную энергию:

$$E_{\text{EX}} + E_{\text{MS}} = \min, \quad (9)$$

в пренебрежении анизотропией (считая материал “идеально мягким”).

Математическая постановка этой задачи ведет к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Решить ее в общем случае, на сегодняшний день, не представляется возможным.

Нано-элементы

Микромагнетизм

Континуальное приближение

Обменная энергия

Энергия намагниченности

Поля рассеяния

Магнитные заряды

Энергия магнитных зарядов

Статическая задача

Обменная длина

Нано-магнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Микромагнитная задача для идеально мягкого ферромагнетика содержит два параметра

- обменную жесткость C
- намагниченность насыщения M_S .

из них можно составить комбинацию с размерностью длины

$$L_E = \sqrt{\frac{C}{\mu_0 M_S}}, \quad (10)$$

определяющую характерный пространственный масштаб задачи.

Нано-элементы

Микромагнетизм

Континуальное приближение

Обменная энергия

Энергия намагниченности

Поля рассеяния

Магнитные заряды

Энергия магнитных зарядов

Статическая задача

Обменная длина

Нано-магнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Для большинства известных магнитомягких материалов L_E порядка единиц-десятков нанометров.

Потому, в частицах сопоставимого размера можно ожидать других, отличных от классических микромагнитных, решений.

Отсюда “нано-магнетизм”.

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

Задача
Римана-
Гильберта

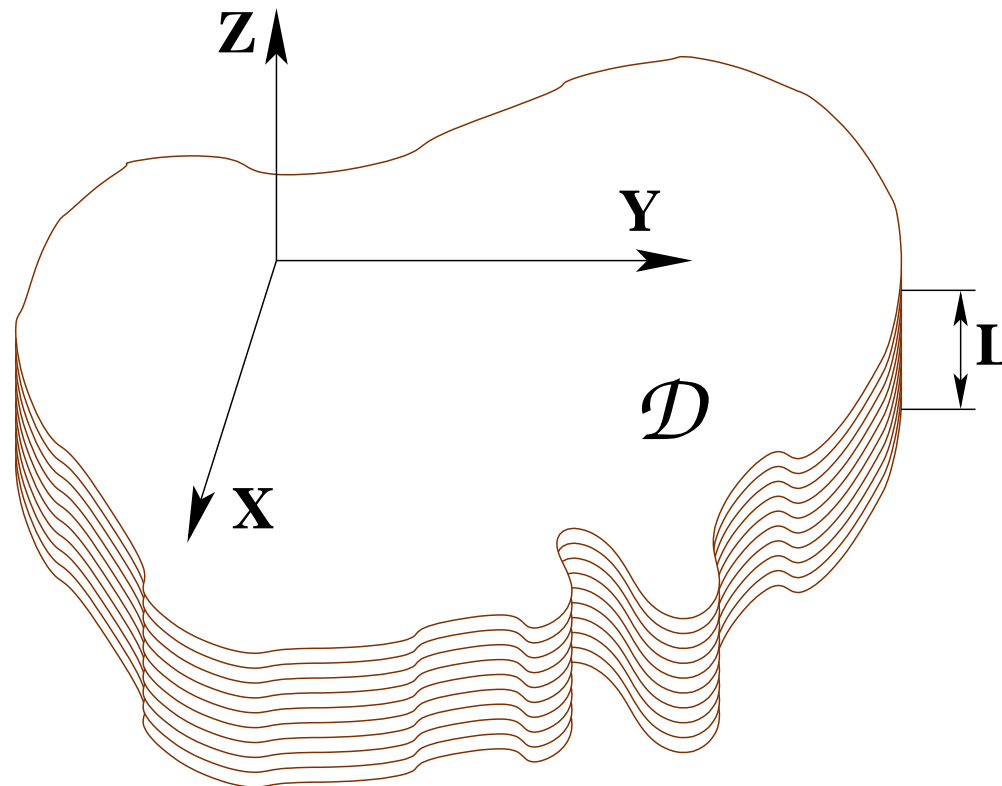
Примеры

Выводы

Нано-магнетизм. Задача для плоского цилиндра.

Плоский цилиндр

Найти равновесное (метастабильное) распределение вектора намагниченности в плоском (тонком) ферромагнитном (из идеально мягкого материала) цилиндре.



Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

Задача
Римана-
Гильберта

Примеры

Выводы

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

Задача
Римана-
Гильберта

Примеры

Выводы

В континуальном приближении

$$\frac{e[\vec{m}]}{\mu_0 M_S^2} = \iiint_{D,L} \left\{ \frac{L_E^2}{2} \sum_{i=X,Y,Z} (\vec{\nabla} m_i)^2 - \vec{h}_D[\vec{m}] \cdot \vec{m} \right\} d^3 \vec{r}, \quad (11)$$

где $L_E = \sqrt{C/(\mu_0 M_S^2)}$ обменная длина,

$\vec{\nabla} = \{\partial/\partial X, \partial/\partial Y, \partial/\partial Z\}$, $\vec{h}_D[\vec{m}]$ размагничивающее поле, созданное $\vec{m}(\vec{r})$.

Как говорилось, минимизировать такую энергию точно в общем случае не представляется возможным.

Последовательная минимизация

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

Задача
Римана-
Гильберта

Примеры

Выводы

Предположим наличие хорошо определенной иерархии энергий (какие-то слагаемые полной энергии более “важны”, чем другие).

Вместо минимизации суммы различных компонент энергии, будем минимизировать их поочередно, от более важных к менее важным.

Начнем с полного набора всех возможных векторных полей $\vec{m}(\vec{r})$. Просеем его, оставив только поля, соответствующие экстремуму самого важного слагаемого. Останется бесконечное множество полей. Повторим с менее важным слагаемым, и т.д.

Насколько далеко так можно продвинуться ? Сколько полей останется ?

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

Задача
Римана-
Гильберта

Примеры

Выводы

Для достаточно маленького плоского нано-цилиндра.

1. Обменная энергия
2. Магнитостатическая энергия
 - (a) Поверхностные заряды
 - i. торцевые заряды
 - ii. боковые заряды
 - (b) Объемные заряды

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

Задача
Римана-
Гильберта

Примеры

Выводы

Считаем, что толщина цилиндра мала по сравнению с обменной длиной.

Рассматриваем только однородные по толщине распределения намагниченности.

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial Z} = 0. \quad (12)$$

Тогда удобно (чисто формально) ввести комплексную координату

$$z = X + iY. \quad (13)$$

Стереографическая проекция

Длина вектора намагниченности фиксирована $|\vec{m}| = 1$. Это можно учесть автоматически, записав его (чисто формально) в виде

$$\begin{aligned} m_X + im_Y &= \frac{2w(z, \bar{z})}{1 + |w(z, \bar{z})|^2} \\ m_Z &= \frac{1 - |w(z, \bar{z})|^2}{1 + |w(z, \bar{z})|^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $w(z, \bar{z})$ – комплексная функция комплексного переменного (не обязательно аналитическая, т.е. не обязательно дифференцируемая) а линия обозначает комплексное сопряжение $\bar{z} = X - iY$.

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

Задача
Римана-
Гильберта

Примеры

Выводы

Нано-элементыМикромагнетизмНано-магнетизмПлоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
МероныТорцевые
зарядыБоковые
зарядыЗадача
Римана-
ГильбертаПримерыВыводы

Вводя операторы комплексного дифференцирования $\partial/\partial z = (\partial/\partial X - i\partial/\partial Y)/2$, $\partial/\partial \bar{z} = (\partial/\partial X + i\partial/\partial Y)/2$, обменную энергию можно представить в виде

$$\sum_{i=X,Y,Z} (\vec{\nabla} m_i)^2 = \frac{8}{(1 + w\bar{w})^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right). \quad (15)$$

Уравнение Эйлера для экстремума этого функционала имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{2\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}. \quad (16)$$

Это нелинейное уравнение, все его решения на данный момент не известны. Известны некоторые.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{2\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}. \quad (17)$$

Солитоны, открытые Белавиным и Поляковым

$$w = f(z), \quad (18)$$

где $f(z)$ – произвольная аналитическая функция.

Мероны, открытые Гроссом

$$w = \frac{f(z)}{\sqrt{f(z)\bar{f}(\bar{z})}}. \quad (19)$$

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

Задача
Римана-
Гильберта

Примеры

Выводы

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

Задача
Римана-
Гильберта

Примеры

Выводы

Мерон $|w| = 1$ не имеет торцевых зарядов, поскольку его $m_Z = 0$. Однако, обменная энергия мерона в окрестности нулей и полюсов $f(z)$ расходится.

Представляя $w(z, \bar{z})$ в виде

$$w(z, \bar{z}) = \begin{cases} f(z)/e_1 & |f(z)| \leq e_1 \\ f(z)/\sqrt{f(z)\bar{f}(\bar{z})} & e_1 < |f(z)| \leq e_2 \\ f(z)/e_2 & |f(z)| > e_2 \end{cases}, \quad (20)$$

где $f(z)$ – произвольная аналитическая функция, получим непрерывную функцию, сшивающую солитон и мерон, со свободными параметрами $0 < e_1 < e_2 < \infty$, позволяющими регулировать размер солитонных “шапок” вблизи нулей и полюсов $f(z)$.

Выбором оставшейся произвольной функции $f(z)$ боковые заряды можно полностью убрать. Для этого необходимо решить краевую задачу Римана-Гильберта:

Найти аналитическую в \mathcal{D} функцию $f(z)$, такую что $\operatorname{Re} [f(\zeta)\overline{n(\zeta)}] = 0$ (отсутствуют нормальные к границе компоненты), где $\zeta \in \mathcal{C} = \partial\mathcal{D}$ – это граница \mathcal{D} , и $n(\zeta) = n_x(\zeta) + in_y(\zeta)$ – комплексная нормаль к \mathcal{C} .

К сожалению, решение Привалова этой краевой задачи, опубликованное в книге Лаврентьеви и Шабата “Методы теории функций комплексного переменного”, позволяет найти только подмножество возможных функций $f(z)$.

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

Задача
Римана-
Гильберта

Примеры

Выводы

Задача Римана-Гильберта

Легко решается для верхней полуплоскости $\text{Im } t > 0$. В этом случае,

$$f(t) = \frac{\sum_{i=0}^m g_i t^i}{\sum_{i=0}^n h_i t^i}, \quad (21)$$

где g_i и h_i произвольные действительные числа.

Для произвольной формы торца частицы, определенной конформным отображением на нее $z = M(t)$ верхней полуплоскости

$$f = M'(t) \frac{\prod_{i=0}^{m_p} (a_i - t)(\bar{a}_i - t) \prod_{j=0}^{m_r} (b_j - t)}{\prod_{i=0}^{n_p} (c_i - t)(\bar{c}_i - t) \prod_{j=0}^{n_r} (d_j - t)} \quad (22)$$

$$z = M(t).$$

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Плоский
цилиндр

Энергия

Последовательная
минимизация

Иерархия

Толщина

Стереографическая
проекция

Обмен

Солитоны и
Мероны

Торцевые
заряды

Боковые
заряды

Задача
Римана-
Гильберта

Примеры

Выводы

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы

Примеры.

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы

Конформное отображение верхней полуплоскости на единичный диск имеет вид

$$M(t) = -\frac{e^{i\alpha}(h + it)}{h - it}, \quad (23)$$

где h произвольный действительный параметр и $\alpha \in [0, 2\pi)$.

В случае $m = 2, n = 0$ получим известные ранее решения.

$$f(z) = (izc + A - \bar{A}z^2), \quad (24)$$

где c и i произвольные действительный и комплексный параметры. $A = 0$ дает анзац Усова и Песчаного для централизованного магнитного вихря.

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

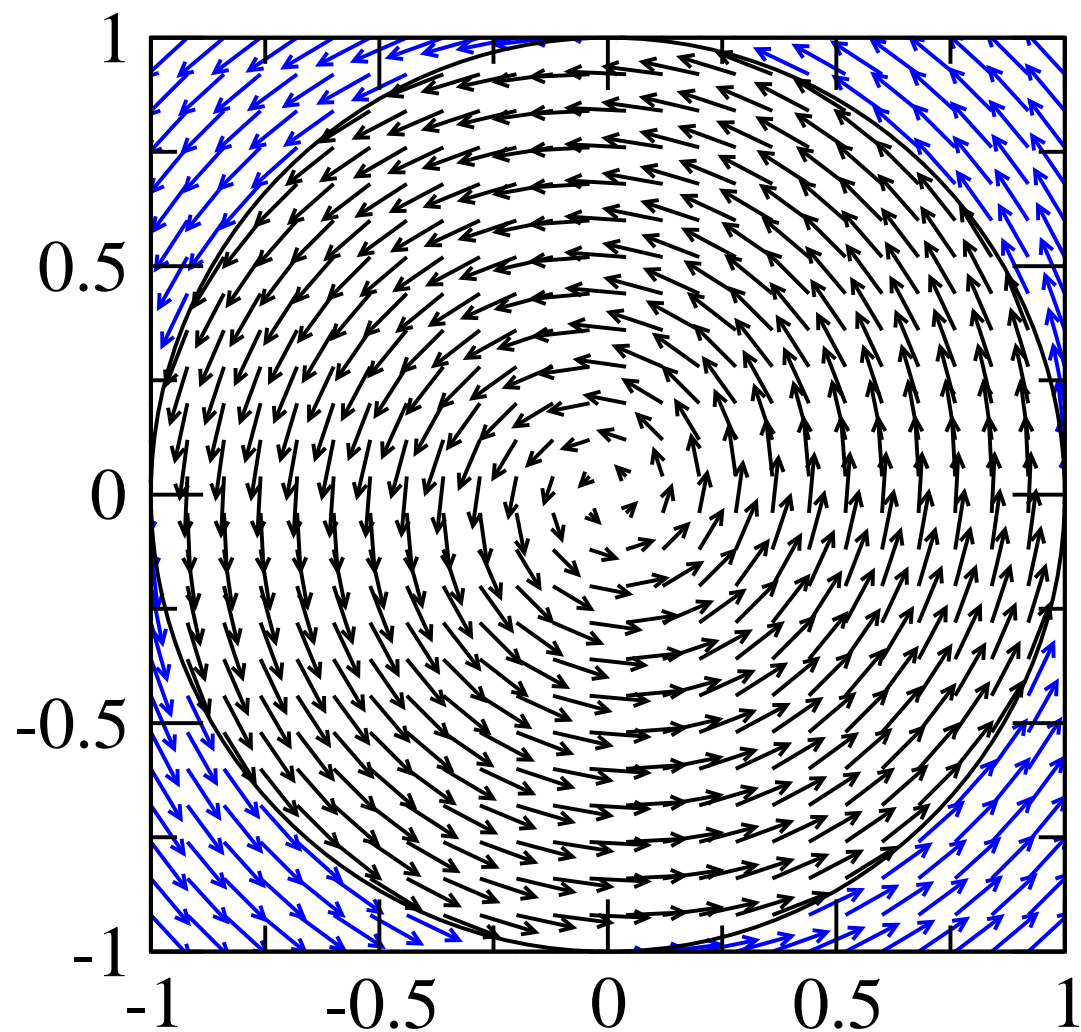
Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы



Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

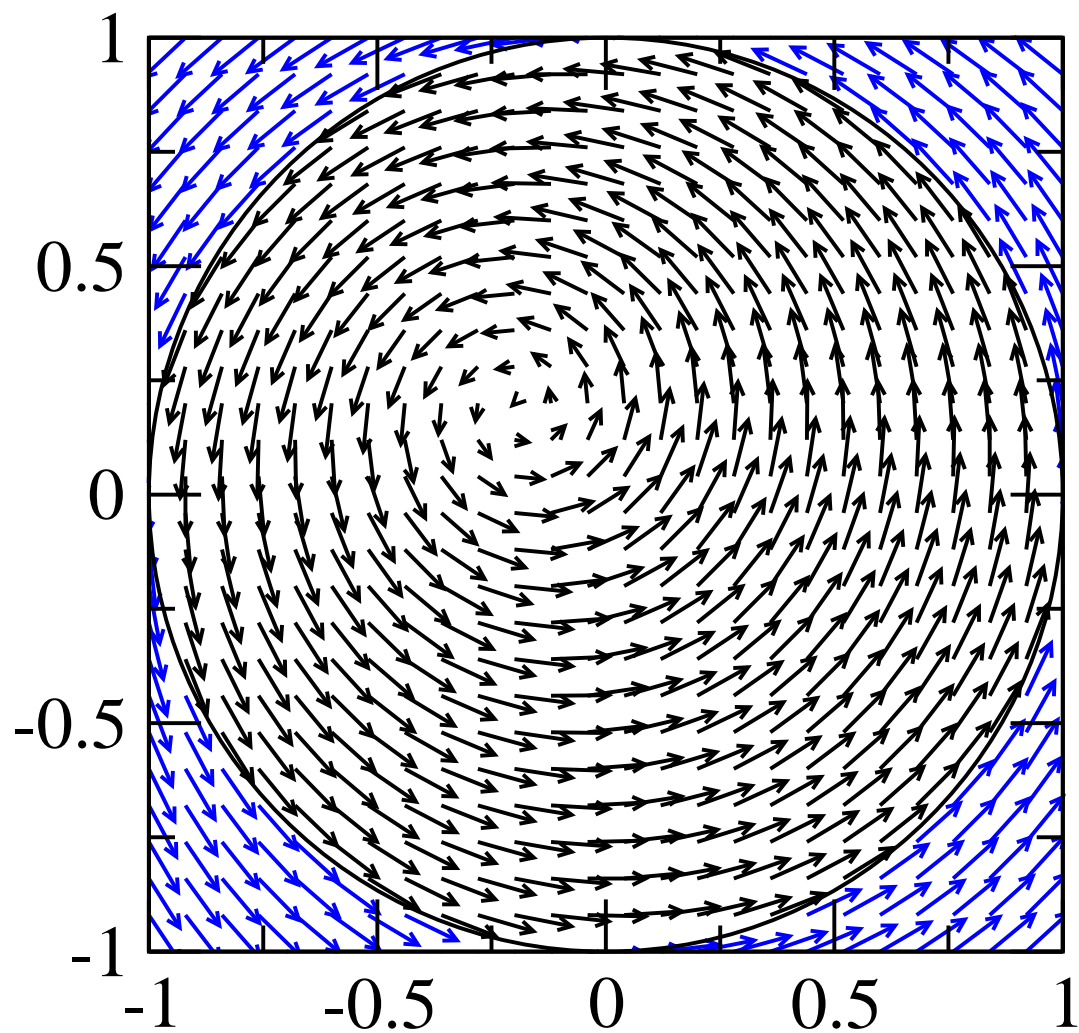
Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы



Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

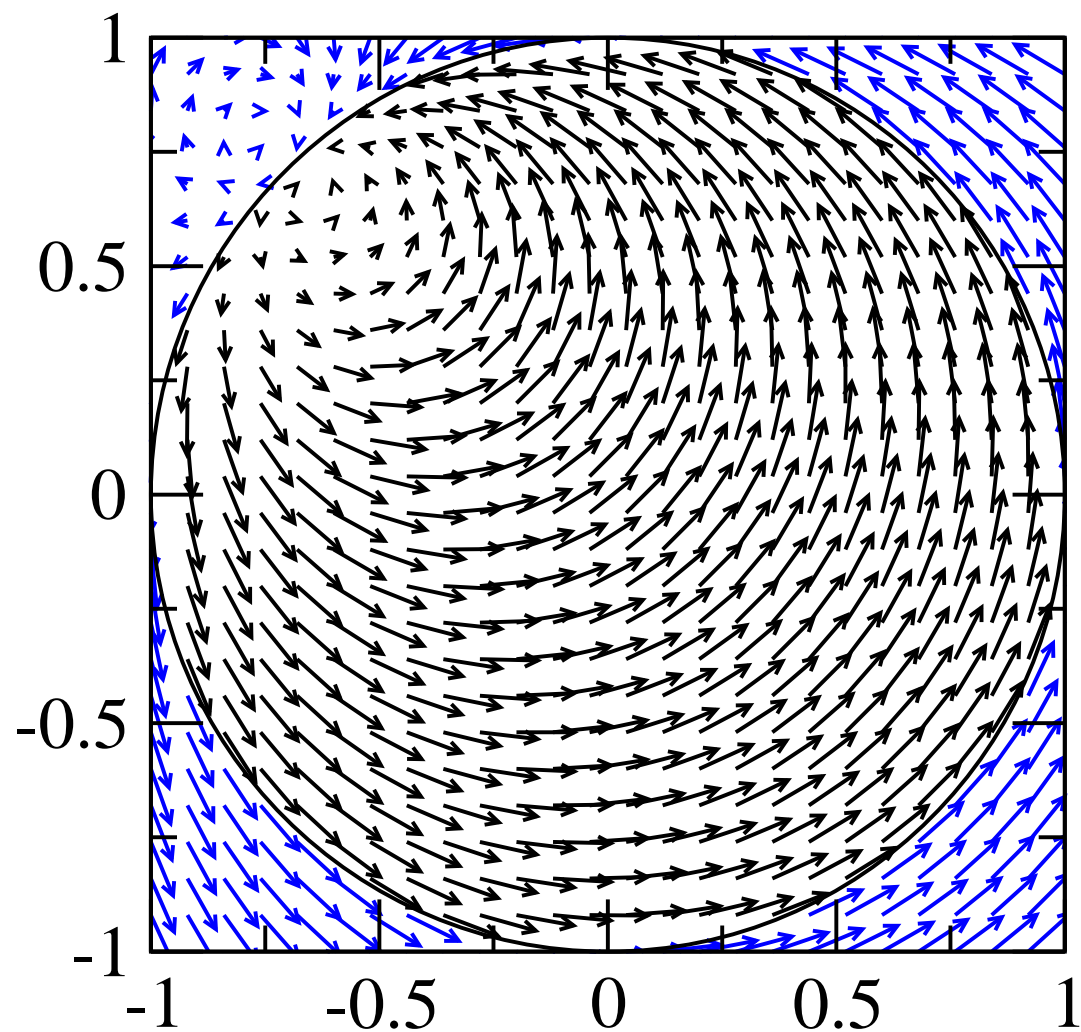
Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы



Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

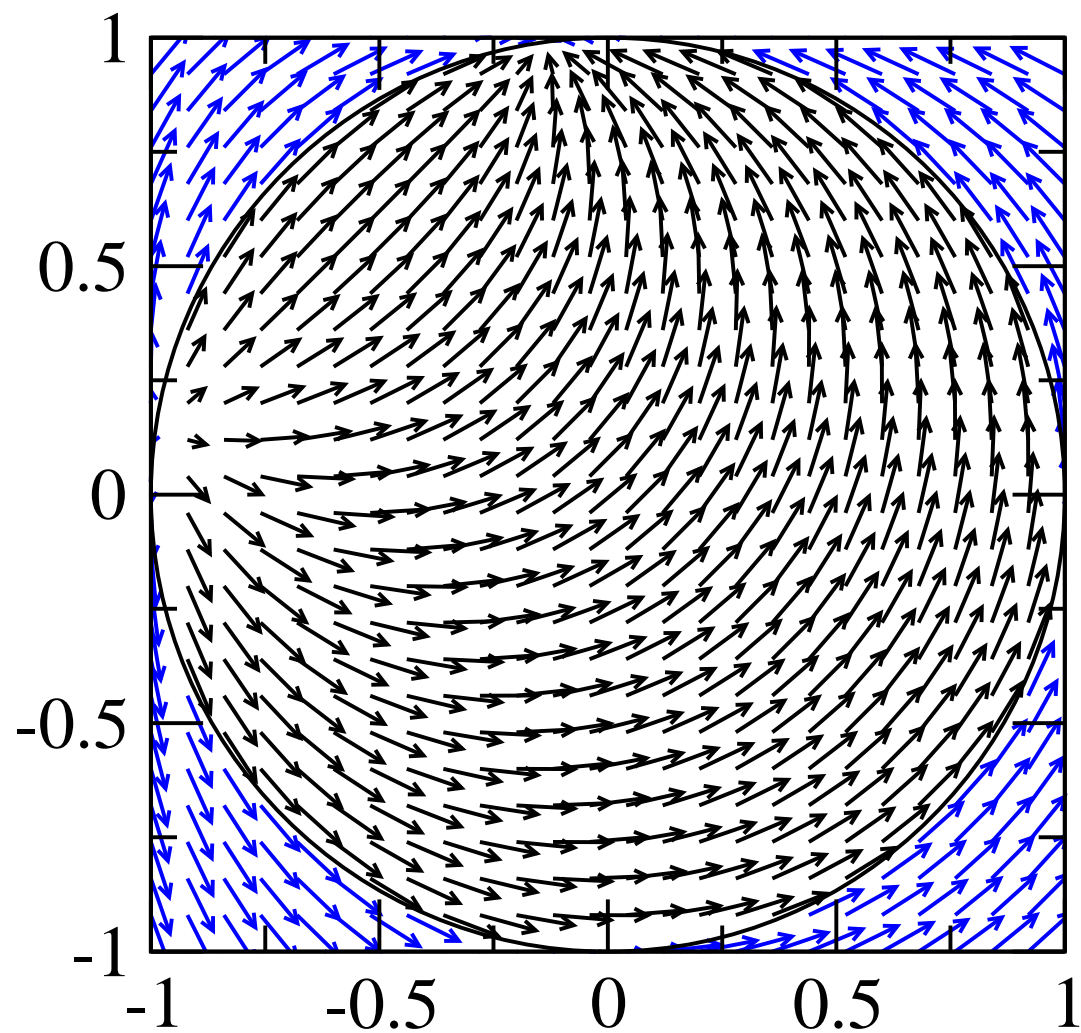
Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы



Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

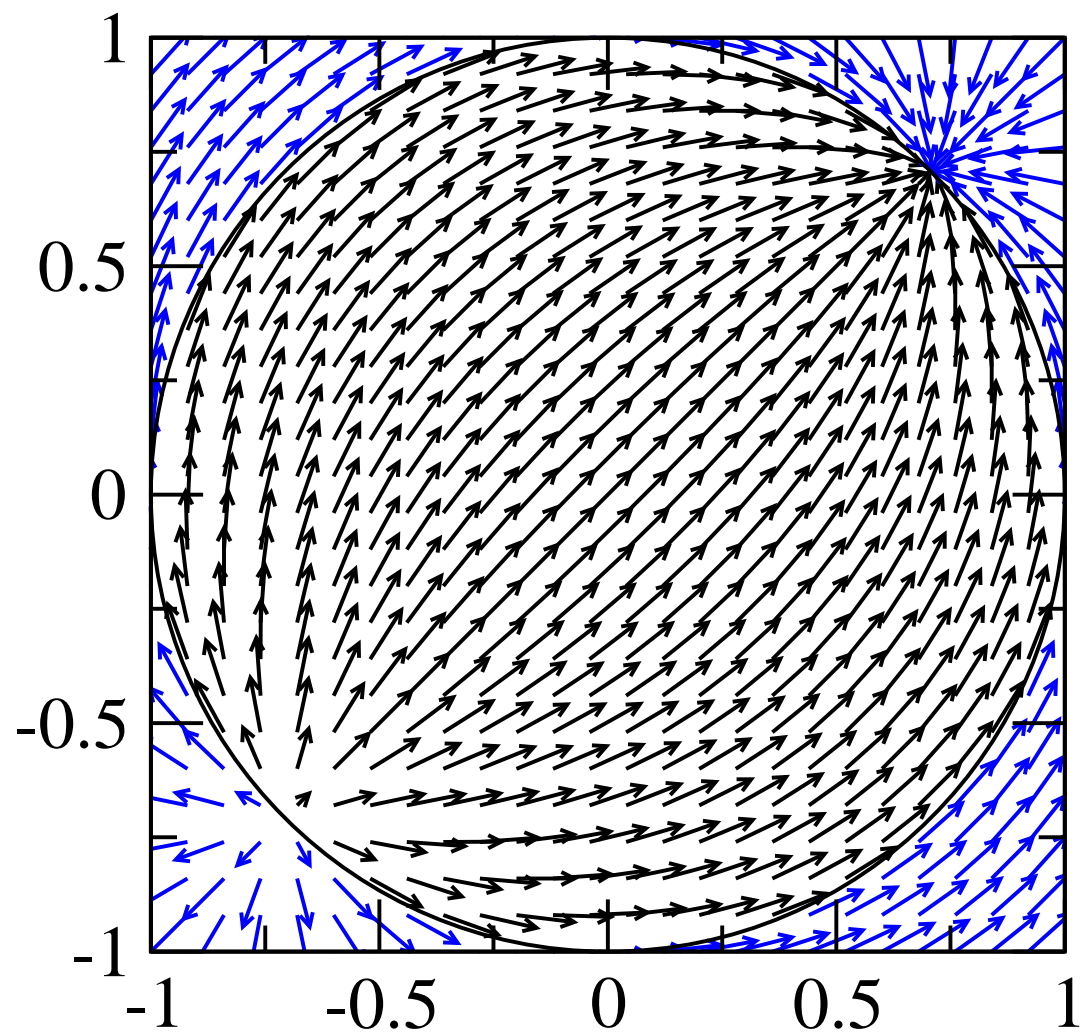
Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы



Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

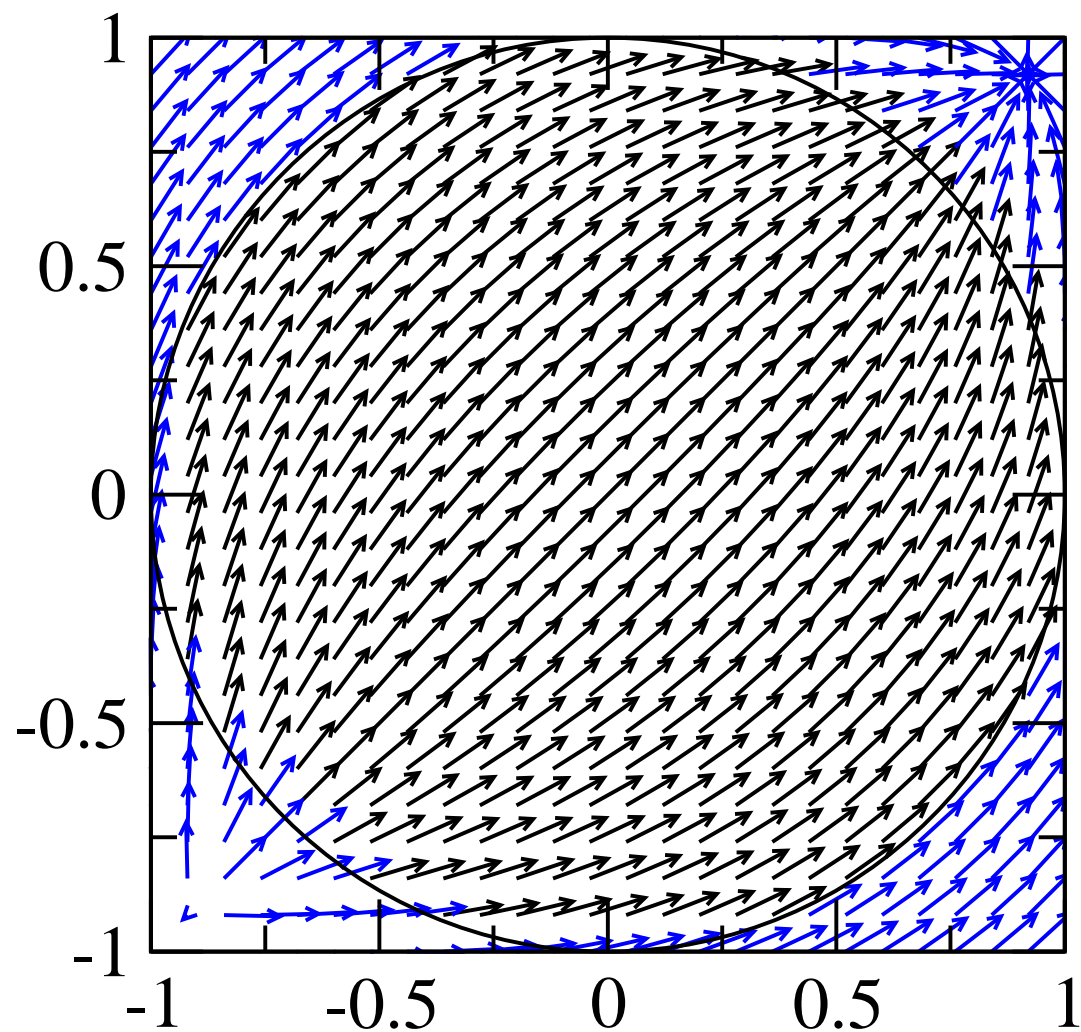
Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы



Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы

В случае больших значений m и n получим многовихревые состояния.

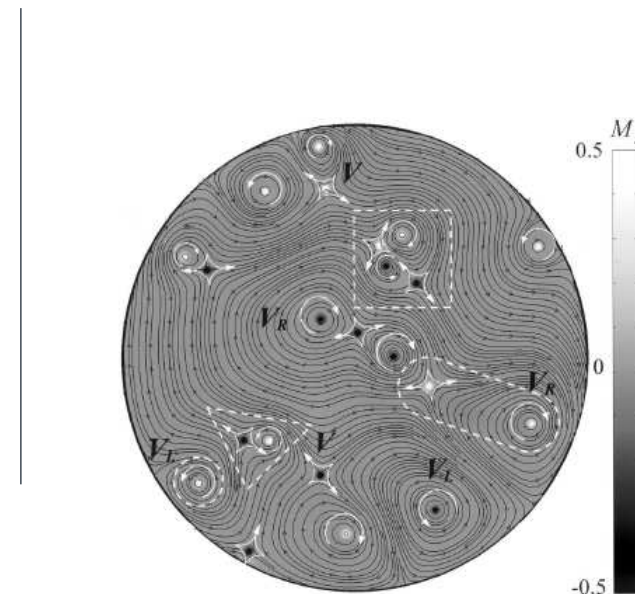
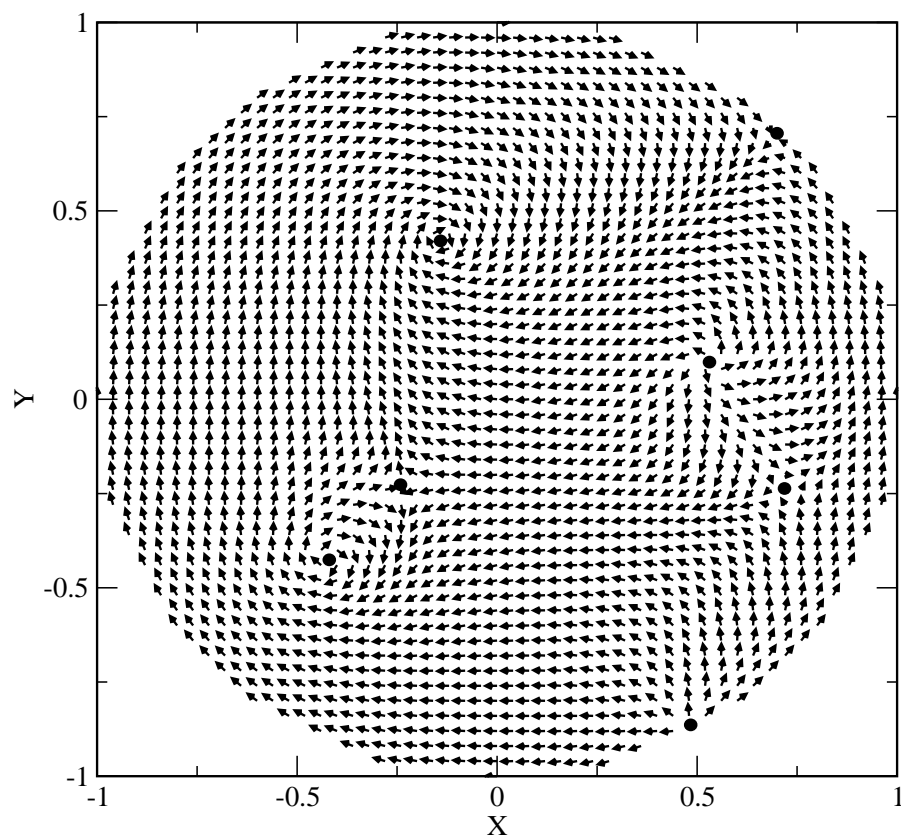


FIG. 1. The plane-view image of magnetic microstructures taken at $t = 0.59$ ns during a relaxation dynamics approaching the equilibrium vortex state from an initial random in-plane M . The gray scale indicates the M_z component, while the contour lines with small arrows represent the in-plane directions of M . The white and black spots represent up and down core orientations of both types of V and \bar{V} . The characteristic structures of various vortex states are denoted by symbols as noted, which are described in the text. Dotted-lines of square, triangle, stadium, and circle shapes highlight the various features of vortices interacting with each other.

K.-S. Lee, B.-W. Kang, Y.-S. Yu and S.-K. Kim, Appl. Phys. Lett. 85, 1568 (2004).

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы

Конформное отображение верхней полуплоскости на равнобедренный треугольник дано

$$M(t) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)} \int_0^t (1 - u^2)^{-2/3} du - \frac{t}{2\sqrt{3}}, \quad (23)$$

где опущены дополнительные параметры, связанные со свободой выбора отображения верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость.

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

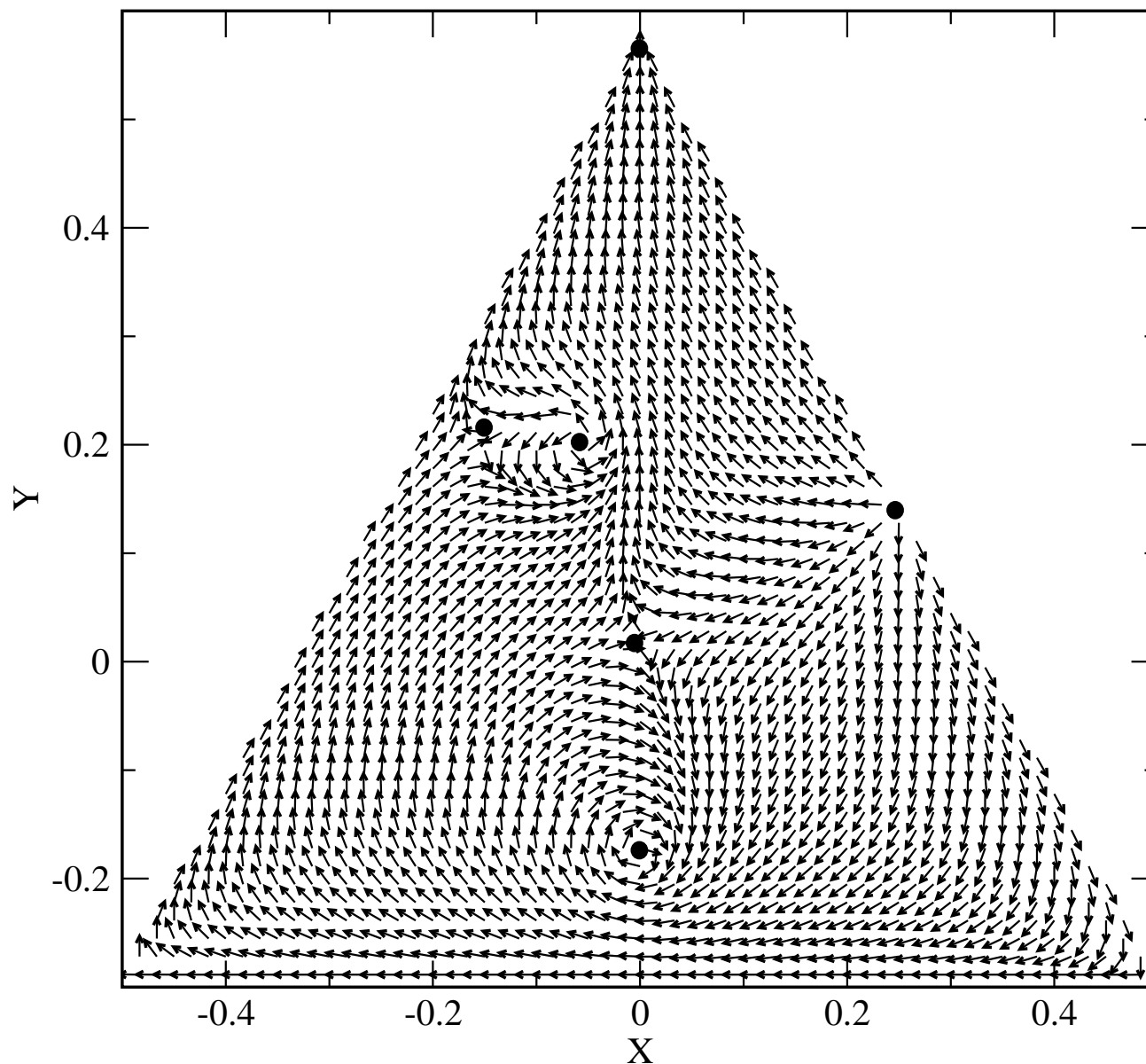
Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы



Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы

Конформное отображение верхней полуплоскости на полосу $0 < \text{Im } z < 1$ есть

$$M(t) = -\frac{\log t}{\pi}, \quad (23)$$

где снова опущены дополнительные параметры, связанные со свободой выбора отображения верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость.

$$T(t) = \frac{at + b}{ct + d}, \quad (24)$$

где $ad - bc > 0$, что соответствует отображению верхней полуплоскости на верхнюю, а не на нижнюю.

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

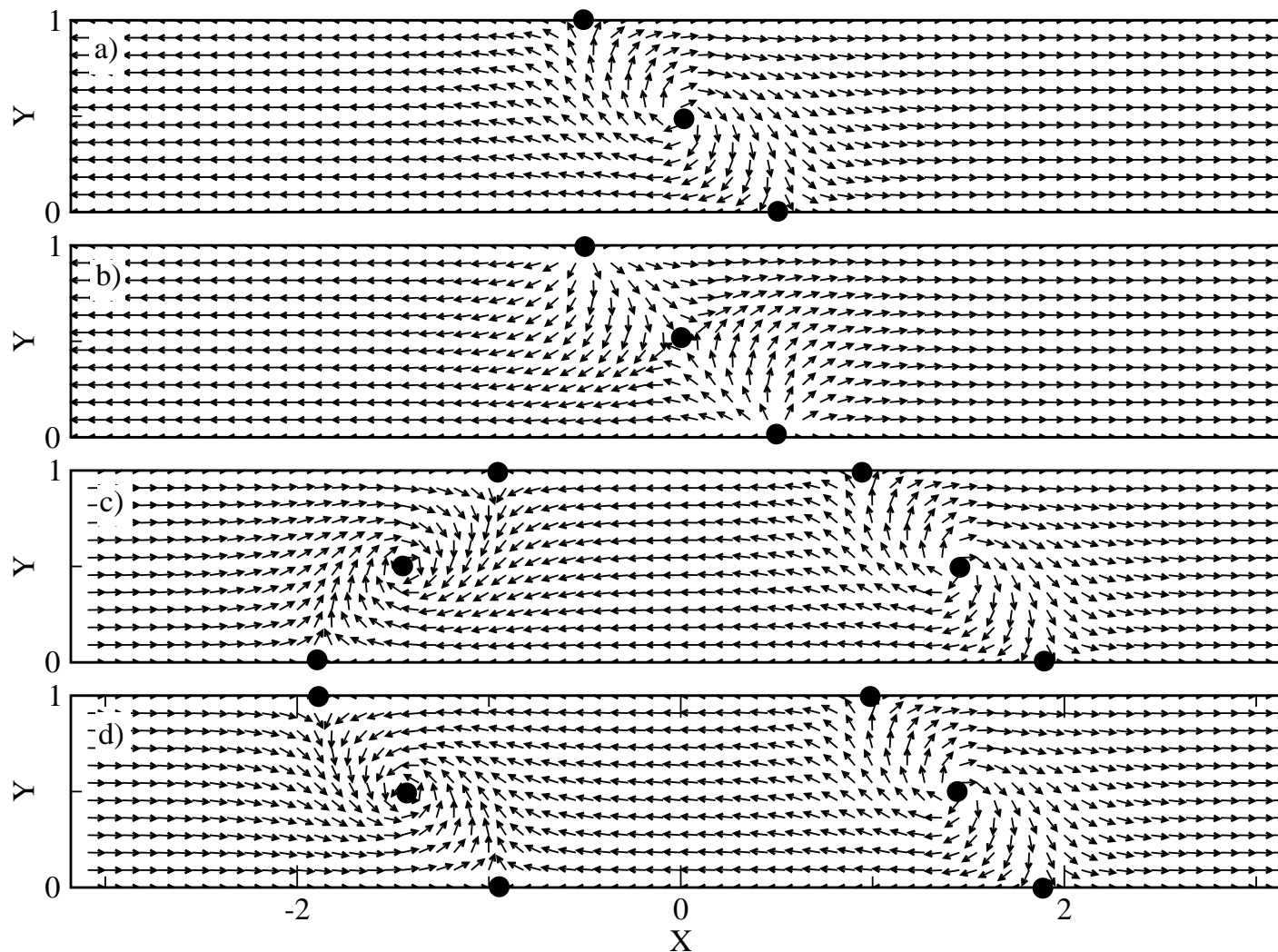
Примеры

Диск

Треугольник

Полоса

Выводы



Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Диск

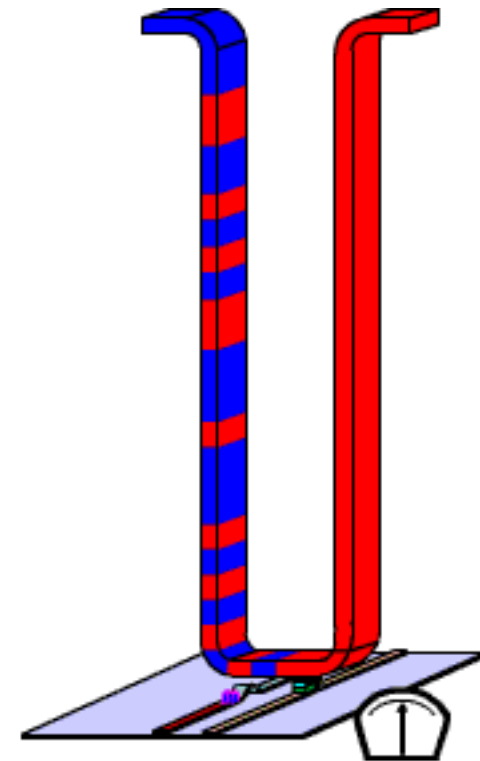
Треугольник

Полоса

Выводы

Задача для многих взаимодействующих доменных границ в длинной полосе возникает в связи с новой идеей Стюарта Паркина по созданию т.н. Racetrack magnetic memory.

S. S. P. Parkin, M. Hayashi, and L. Thomas, Science 320, 190 (2008).



Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Выводы

Выводы.

Нано-элементы

Микромагнетизм

Нано-магнетизм

Примеры

Выводы

Выводы

- Любая аналитическая функция комплексного переменного соответствует (в указанных предположениях) решению некоторой статической задачи нано-магнетизма .
- Задавшись произвольной формой цилиндра, выразить такую функцию можно, решив задачу Римана-Гильберта, через рациональную функцию произвольного порядка с действительными коэффициентами.

Спасибо за внимание !